QUANDO STUDIAMO IL MOTO DI UNA PARTICELLA IN UN CAMPO CENTRALE IN R^3 (CIOÈ SENZA LA SEMPLIFICAZIONE INIZIALE DI RIDURCI ALLO STUDIO DI UN MOTO PIANO ... (ALLA LAVAGNA PER CAPIRCI) IN COORDINATE SFERICHE ABBIAMO TROVATO CHE

$$(1) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left[\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \,\mathrm{sen}\,\theta \right] - U(\rho)$$

CON $\quad p_\rho = m \dot{\rho} \qquad p_\theta = m \rho^2 \dot{\theta} \qquad p_\varphi = m \rho^2 \,\mathrm{sen}^2\theta\, \dot{\varphi}$

DA CUI

$$(2) \quad H = \frac{1}{2m} \left[p_\rho^2 + \frac{p_\theta^2}{\rho^2} + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2 \,\mathrm{sen}^2\theta} \right] - U(\rho)$$

SUBITO OSSERVIAMO CHE $\quad p_\varphi = \gamma_\varphi$ = COSTANTE DEL MOTO

SE RISOLVIAMO CON HAMILTON-JACOBI OTTENIAMO CHE

$$(3) \quad V(\rho, \theta, \varphi, c_\alpha) = W(\rho, \theta, c_1, \gamma_\varphi, E) + \gamma_\varphi \varphi - Et$$

CERCHIAMO $\quad W = W_1(\rho, c_\alpha) + W_2(\theta, c_\alpha)$

DOVE DALLE RELAZIONI $\quad p_\alpha = \dfrac{\partial V}{\partial q^\alpha} \quad$ OTTENIAMO

$$(4) \quad p_\rho = m\dot{\rho} = \frac{\partial W_1}{\partial \rho} \qquad p_\theta = m\rho^2\dot{\theta} = \frac{\partial W_2}{\partial \theta} \qquad p_\varphi = \gamma_\varphi$$

SOSTITUENDO NELLA HAMILTONIANA, RIORDINANDO I TERMINI ABBIAMO (DOPO CALCOLI NOTI) LE DUE RELAZIONI INDIPENDENTI (PONIAMO $\alpha = -A^2$)

$$(*) \quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial W_1}{\partial \rho}\right)^2 - 2m\left[E + U(\rho)\right] = -\dfrac{A^2}{\rho^2} \\[2ex] \left(\dfrac{\partial W_2}{\partial \theta}\right)^2 + \dfrac{\gamma_\varphi^2}{\mathrm{sen}^2\theta} = A^2 \end{cases}$$

ALLORA COME COSTANTE C_1 PRENDIAMO (~~..~~ OPPORTUNAMENTE PER IL SUO SIGNIFICATO FISICO) A^2.

DALLE RESTANTI RELAZIONI (*) OTTENIAMO (A PARTE IL SECONDO CHE PER ADESSO E' IRRILEVANTE AI FINI DEL NOSTRO RAGIONAMENTO.)

$$(5)\quad \frac{\partial W_1}{\partial \rho} = \sqrt{-\frac{A^2}{\rho^2} + 2m\left[E + U(\rho)\right]}$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial \theta} = \sqrt{A^2 - \frac{\gamma_\varphi^2}{\operatorname{sen}^2\theta}}$$

CHE POSSIAMO INTEGRARE .....

ANALIZZIAMO IL SIGNIFICATO FISICO DELLE COSTANTI A^2 e γ_φ

PER FARE QUESTO IN MODO RAPIDO CONSIDERIAMO IL RIFERIMENTO NATURALE (CHE NORMALIZZIAMO, PER SEMPLICITA' PER EVITARE LE "ROGNE" DELLA DIFFERENZA TRA COMPONENTI COVARIANTI E CONTROVARIANTI.)

$$(6)\begin{cases} \hat{e}_\rho = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\underline{e}_1 + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,\underline{e}_2 + \cos\theta\,\underline{e}_3 \\ \hat{e}_\theta = \frac{1}{\rho}e_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\underline{e}_1 + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,\underline{e}_2 - \operatorname{sen}\theta\,e_3 \\ \hat{e}_\varphi = \frac{1}{\rho\operatorname{sen}\theta}e_\varphi = -\operatorname{sen}\varphi\,\underline{e}_1 + \cos\varphi\,\underline{e}_2 \end{cases}$$

QUESTO RIFERIMENTO E' ORTONORMALE. ED INOLTRE E' BANALE OSSERVARE CHE

$$(7)\quad \hat{\underline{e}}_\rho \wedge \hat{\underline{e}}_\theta = \hat{\underline{e}}_\varphi \qquad \hat{\underline{e}}_\rho \wedge \hat{\underline{e}}_\varphi = -\hat{\underline{e}}_\theta$$

ANALOGAMENTE SE ANALIZZIAMO LA VELOCITA' E' POSSIBILE AVREMO NELLE DUE BASI

$$\begin{cases} \underline{v} = \dot{x}_1\,\underline{e}_1 + \dot{x}_2\,\underline{e}_2 + \dot{x}_3\,e_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{r} = \rho\, \hat{\underline{e}}_\rho \\ \underline{v} = \dot{\rho}\, \hat{\underline{e}}_\rho + \rho \dot{\theta}\, \hat{\underline{e}}_\theta + \rho \dot{\varphi} \operatorname{sen}\theta\, \hat{\underline{e}}_\varphi \end{cases}$$

Se quindi calcoliamo il momento angolare

$$\underline{J} = \underline{r} \wedge m \underline{v} = m\left\{\rho\, \hat{\underline{e}}_\rho \wedge \left(\rho \dot{\theta}\, \hat{\underline{e}}_\theta + \rho \operatorname{sen}\theta\, \dot{\varphi}\, \hat{\underline{e}}_\varphi\right)\right\} =$$

$$= m \rho^2 \dot{\theta}\, \hat{\underline{e}}_\varphi - m \rho^2 \operatorname{sen}\theta\, \dot{\varphi}\, \hat{\underline{e}}_\theta$$

da cui $\quad J^2 = (m \rho^2 \dot{\theta})^2 + (m \rho^2 \operatorname{sen}\theta\, \dot{\varphi})^2 \qquad (8)$

inoltre calcoliamo soltanto

$$J_z = m\left[x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1\right] = m \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta\, \dot{\varphi} \quad (*)$$

$$= p_\varphi = \gamma_\varphi \qquad (9)$$

Quindi utilizzando la $(*)_2$ e le (4) avremo per le (8),(9

$$\boxed{A^2 = |J|^2} \qquad \boxed{p_\varphi = J_z = \gamma_\varphi} \qquad (10)$$

Quindi ricaviamo che il modulo del momento angolare $|J|$ e J_z sono costanti del moto.

(Questo è conseguenza del fatto che $\underline{J}$ è un vettore costante come diretta conseguenza dell'invarianza del sistema per rotazioni (Teorema di Noether))

(*) Ricordiamo che $x_1 = \rho \operatorname{sen}\theta \cos\varphi$, $x_2 = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$; $x_3 = \rho \cos\theta$.

$$\dot{x}_1 = \dot{\rho} \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \rho \cos\theta\, \dot{\theta} \cos\varphi - \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi\, \dot{\varphi}$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\rho} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + \rho \cos\theta\, \dot{\theta} \operatorname{sen}\varphi + \rho \operatorname{sen}\theta \cos\varphi\, \dot{\varphi}$$

$$\dot{x}_3 = \dot{\rho} \cos\theta - \rho \operatorname{sen}\theta\, \dot{\theta}$$

da cui banalmente la (*)

E' CHIARO CHE SCEGLIENDO UN RIFERIMENTO ARBITRARIO NON SI VEDE IMMEDIATAMENTE CHE IL MOTO E' PIANO A MENO CHE SI SCELGA COME RIFERIMENTO IL SISTEMA CHE ABBIA COME ASSE $\underline{z}$ L'ASSE DIRETTO COME IL VETTORE $\underline{\Sigma}(0)$ CIOE' COME IL MOMENTO ANGOLARE ALL'ISTANTE $t=0$.

NOTIAMO CHE:

"QUESTA SCELTA E' POSSIBILE SENZA SAPERE CHE $\vec{\Sigma}$ E' COSTANTE, MA HA L'INCONVENIENTE DI DIPENDERE DAI DATI INIZIALI, NON E' TUTTAVIA RESTRITTIVA A CAUSA DELLA INVARIANZA PER ROTAZIONI DEL SISTEMA."

CON QUESTA SCELTA AVREMO CHE

$$\theta(0)=\frac{\pi}{2} \qquad \dot{\theta}(0)=0 \qquad e \qquad |A|=K_\varphi$$

UTILIZZANDO QUESTE CONDIZIONI INIZIALI DALLA $(*)_2$ AVREMO COME UNICA SOLUZIONE POSSIBILE CHE $\theta(t)=\pi/2 \quad \forall t$. CIOE' IL MOTO SI SVOLGERA' NEL PIANO xy, INFATTI DALLA $(*)_2$ e (6) AVREMO

$$(m\rho^2\dot{\theta})^2 = A^2\left[1-\frac{1}{\sin^2\theta}\right]$$

QUESTA E' COMPATIBILE CON LE CONDIZIONI INIZIALI $\theta(0)=\pi/2$ $\dot{\theta}(0)=0$, INOLTRE SE ESISTESSE UNA SOLUZIONE $\theta(t)\neq\pi/2$ DOVREBBE ACCADERE

$$(m\rho^2\dot{\theta})^2 = -A^2\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$$

IL CHE E' ASSURDO. (O EQUIVALENTEMENTE CHE $|A|>K_\varphi$ IL CHE E' IN CONTRASTO CON IL FATTO CHE $|A|$ e K_φ SONO COSTANTI ED UGUALI)

QUINDI CHE IL MOTO IN R^3 SIA PIANO SI VEDE SCEGLIENDO OPPORTUNAMENTE LE CONDIZIONI INIZIALI.